Jurnal THEOREMS (*The Original Research of Mathematics*) Vol. 4 No.1 Juli hal. 87-95 Tahun 2019

MENGIDENTIFIKASI BILANGAN DOMINASI LOKASI PADA GRAF BINTANG KIPAS
(Identify Locating-Dominating Number in Star Fan Graph)

Anuwar Kadir Abdul Gafur[1*], Ariestha Widyastuty Bustan[2]
[1]Program Studi Matematika, Fakultas MIPA, Universitas Pasifik Morotai, Jl Siswa Darame, Kec Morotai Selatan, Kabupaten Pulau Morotai, Maluku Utara, 97771, Indonesia
[2] Program Studi Matematika, Fakultas MIPA, Universitas Pasifik Morotai, Jl Siswa Darame, Kec Morotai Selatan, Kabupaten Pulau Morotai, Maluku Utara, 97771, Indonesia
[*]*E-mail*: anuwarkadirabdulgafur@gmail.com

ABSTRAK

Penelitian ini bertujuan untuk mengidentifikasi bilangan dominasi-lokasi pada graf bintang kipas $(S(m, F_n, v))$. Bilangan dominasi–lokasi dari graf $S(m, F_n, v)$ merupakan kardinalitas terkecil dari himpunan $W \subseteq V(S(m, F_n, v))$ sehingga setiap dua titik $u, v \in V(S(m, F_n, v))$ dengan $u \neq v$, $\emptyset \neq N(u) \cap W \neq N(v) \cap W \neq \emptyset$. Suatu graf $S(m, F_n, v)$ dengan memiliki $mn + m + 1$ titik dan memiliki $2mn$ sisi dengan orde $m \geq 3$ dan $n \equiv 0(mod\ 5)$ disebut graf bintang kipas yang diperoleh dengan menempelkan satu salinan F_n pada masing-masing titik pendant dari S_m dimana S_m adalah graf bintang dengan $m + 1$ titik dan m sisi serta F_n adalah graf kipas dengan $n + 1$ titik dan $2n - 1$ sisi. Penelitian ini menggunakan metode studi literatur dengan mengumpulkan data dan informasi dari beberapa buku dan jurnal. Hasil penelitian menunjukkan bahwa biilangan dominasi-lokasi untuk graf bintang kipas $S(m, F_n, v)$ dengan orde $m \geq 3$ dan $n \equiv 0\ (mod\ 5)$ adalah $\lambda(S(m, F_n, v)) = \frac{m}{5}(2n + 5)$.

Kata kunci: *bilangan dominasi-lokasi, himpunan dominasi-lokasi, graf bintang kipas*

ABSTRACT

This study aim to identify the locating-dominating number of star fan graphs $(S(m, F_n, v))$. The locating-dominating number of a graph $S(m, F_n, v)$ is defined as the cardinality of minimum of $W \subseteq V(S(m, F_n, v))$ such that for every distinct vertices $u, v \in V(S(m, F_n, v))$, where $u \neq v$, $\emptyset \neq N(u) \cap W \neq N(v) \cap W \neq \emptyset$. A graph $S(m, F_n, v)$ where have $mn + m + 1$ vertices end have $2mn$ edges with of order $m \geq 3$ end $n \equiv 0\ (mod\ 5)$ is called fan star graph obtained by attaching one copy of F_n to every pendant vertex from S_m. S_m is a star graph with $m + 1$ vertices and m edges and F_n is a fan graph with $n + 1$ vertices and $2n - 1$ edges. The literature study method used in this study and it carried out by collecting data and information from several books and journals. The result show that the locating-dominating of $S(m, F_n, v)$ graph with orde $m \geq 3$ and $n \equiv 0\ (mod\ 5)$ is $\lambda(S(m, F_n, v)) = \frac{m}{5}(2n + 5)$.

Keywords: *locating-dominating number, locating-dominating set, star fan graphs*

p-ISSN: 2528-102X, e-ISSN: 2541-4321, URL: http://jurnal.unma.ac.id/index.php/th

1. PENDAHULUAN

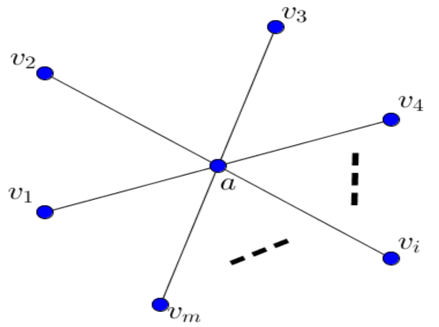
Salah satu kajian yang menarik dalam teori graf adalah konsep dimensi metrik. Topik ini diperkenalkan oleh Slater pada tahun 1975 [1]. Pada tahun 1976 Harary dan Malter [2] juga memperkenalkannya secara teripsah. Slater mengunakan istilah *locating set* atau himpunan lokasi, sedangkan Harary dan Malter memakai istilah *resolving set* atau himpunan pembeda. Slater mengaitkan permasalahan konsep himpunan lokasi yang memiliki kardinalitas minimum dengan masalah jaringan. Masalah tersebut tidak lain adalah permasalahan untuk menentukan banyaknya alat pendeteksi sonar dalam suatu jaringan. Alat-alat tersebut digunakan sebagai acuan sehingga lokasi dari setiap posisi dalam jaringan tersebut dapat diketahui. Khuller dkk [3] pada tahun 1996 kemudian menjelaskan aplikasi permasalahan dimensi metrik graf pada bidang sains komputasi dan robotika. Chartrand dan Zhang pada tahun 2003 juga memanfaatkan masalah ini untuk navigasi robotika [4]. Konsep himpunan pembeda juga diaplikasikan oleh Chartrand dkk. di tahun 2000 pada bidang kimia untuk mengklasifikasi struktur dari molekul-molekul kimia [5]. Setelah itu, pengembangan dalam dimensi metrik melahirkan beberapa konsep baru, salah satunya adalah konsep himpunan dominasi-lokasi. J. Caceres dkk. mengaitkan konsep dominasi-lokasi ini dengan permasalahan penempatan alat pendeteksi dalam suatu bangunan. J. Caceres dkk. mengasumsikan bangunan sebagai graf. Kemudian alat pendeteksi tersebut ditempatkan di beberapa titik di graf. Oleh karena itu, diperlukan suatu optimasi untuk menentukan banyaknya perangkat yang dibutuhkan sehingga dapat mendeteksi masalah di setiap titik. Misalkan alat pendeteksi yang dimaksud adalah salah satunya bunyi alaram yang menunjukkan terjadi kerusakan atau kebakaran. Setiap alaram akan memberikan sinyal ketika mendeteksi kerusakan atau kebakaran yang berdekatan dengan titik alaram ditempatkan sehingga lokasi kebakaran atau kerusakan dapat ditemukan. Suatu metoda optimasi untuk menyelesaikan permasalahan tersebut adalah konsep himpunan dominasi-lokasi.

Semua graf adalah dalam makalah ini adalah graf terhubung, sederhana, tak berarah, dan terbatas. *Himpunan titik* dan *himpunan sisi* dari Graf G didefinisikan berturut-turut oleh $V(G)$ dan $E(G)$. Titik u dan v dikatakan *tetangga* di Gjika terdapat sisi $uv \in E(G)$ himpunan tetangga dari titik u di $V(G)$ didefinisikan sebagai $N(u) = \{v \in V(G) | \, uv \in E(G)\}$. Misalkan Wmerupakan subhimpunan dari $V(G)$, disebut sebagai *himpunan dominasi-lokasi* dari G jika untuk setiap titik berbeda u dan v di $V(G)$ selain W berlaku $\emptyset \neq N(u) \cap W \neq N(v) \cap W \neq \emptyset$. *Bilangan dominasi-lokasi* dilambangkan dengan $\lambda(G)$, adalah kardinalitas terkecil dari himpunan dominasi-lokasi dari G [6]. Berdasarkan hasil penelitian sebelumnya, Ignacio M. Pelayo dan J. Caceres dkk [7] berhasil menemukan bilangan dominasi-lokasi dari beberapa graf. Hernando dkk [8] memperluas penentuan bilangan dominasi-lokasi dengan menentukan bilangan dominasi-lokasi pada suatu graf dengan komplemennya. Oleh karena itu, kami tertarik untuk mempelajari penentuan bilangan dominasi lokasi dari dua buah graf bintang S_m dan F_n yang digabungkan disebuat graf bintang kipas $S(m, F_n, v)$ dengan $mn + m + 1$ titik dan memiliki $2mn$ sisi dengan orde $m \geq 3$ dan $n \equiv 0 (mod\ 5)$.

Definisi 1.1.

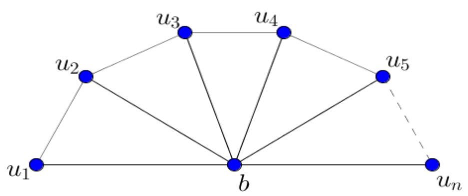
p-ISSN: 2528-102X, e-ISSN: 2541-4321, URL: http://jurnal.unma.ac.id/index.php/th

Graf bintang (S_m) dengan orde $m \geq 3$ adalah graf sederhana yang memiliki $m+1$ titik dan m sisi yang mana setiap dua titik u, v di S_m yang berbeda bertetangga dengan satu titik a di S_m tetapi titik u tidak bertentangga dengan v di S_m. Seperti pada Gambar 1 di bawah ini



Gambar 1. Graf Bintang

Definisi 1.2.
Graf kipas (F_n) dengan orde $n \geq 3$ adalah graf sederhana yang memiliki $n+1$ titik dan $2n-1$ sisi yang mana setiap titik u, v, z di F_n bertetangga dengan satu titik b di F_n dengan $uv, vz \in E(F_n)$ tetapi $uz \notin E(F_n)$. Seperti pada Gambar 2 di bawah ini.

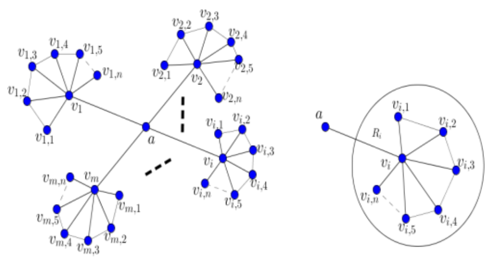


Gambar 2. Graf Kipas

Definisi 1.3.
Graf bintang kipas $(S(m, F_n, v))$ [9] dengan orde $m, n \geq 3$ adalah graf sederhana yang memiliki $mn + m + 1$ titik dan $2mn$ sisi yang diperoleh dengan menempelkan satu titik b salinan di F_n pada masing-masing titik v_i dimana $i = 1,2, \cdots, m$ pandent dari S_m serta menggunakan aturan sebagai berikut:

i. $V(S(m, F_n, v)) = \{a, v_i, v_{(i,j)} | 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n\}$

ii. $E(S(m, F_n, v)) = \{av_i, v_i v_{(i,j)}, v_{(i,j)} v_{(i,j+1)} | 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n-1\}$ tetapi $av_{(i,j)}, v_i v_{i+1}, v_{(i,j)} v_{(i,j+2)} \notin E(S(m, F_n, v))$.



Gambar 3. Graf Bintang Kipas

2. METODE PENELITIAN

Metode penelitian merupakan suatu kerangka dalam pemecahan masalah yang menggambarkan tahapan-tahapan penyelesaian masalah secara singkat berserta penjelasannya. Metode penelitian yang digunakan dalam penelitian ini adalah metode penelitian studi literature. Tahapan-tahapan dalam dalam penelitian ini adalah menelaah berbagai referensi tentang bilangan dominasi lokasi, penentuan graf yang akan dicari bilangan lokasi dominasinya dengan mengecek kebaruan graf yang digunakan, dalam hal ini graf yang digunakan adalah graf bintang kipas , jika hasilnya trivial maka akan diaplikasikan ke graf lain, jika tidak maka ditentukan penentuan bilangan dominasi lokasi pada graf bintang kipas secara umum, dan tahap terakhir adalah pembuatan kesimpulan yang disajikan dalm bentuk teorema.

p-ISSN: 2528-102X, e-ISSN: 2541-4321, URL: http://jurnal.unma.ac.id/index.php/th

3. HASIL DAN PEMBAHASAN

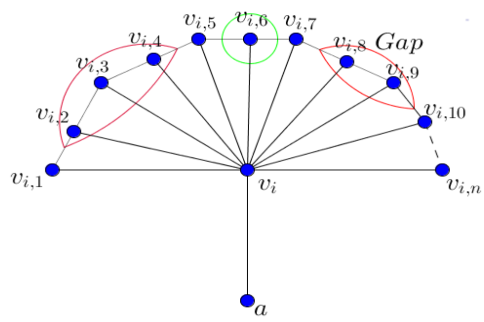
Lemma 3.1. Misalkan $S(m, F_n, v)$ adalah graf bintang kipas dengan orde $m \geq 3$ dan $n \equiv 0 \ (mod\ 5)$.

Jika W adalah himpunan dominasi-lokasi dari $S(m, F_n, v)$ dan terdapat $u, v \in V(S(m, F_n, v))$ sehingga $N(u) = \{z\} = N(v)$ untuk setiap $z \in V(S(m, F_n, v))$ selain u dan v maka $u \in W$ dan $v \in W$.

Bukti. Andaikan $u \notin W$ dan $v \notin W$. Misalkan untuk setiap $x \in V(S(m, F_n, v)) \setminus \{u, v\}, W(x) = N(x) \cap W$. Karena untuk setiap titik $z \in V(S(m, F_n, v))$ selain u dan v berlaku $N(u) = \{z\} = N(v)$. Maka $N(u) \cap W = N(v) \cap W$, kontradiksi dengan W himpunan dominasi-lokasi dari $S(m, F_n, v)$. Jadi $u \in W$ dan $v \in W$.

Definisi 3.1.

Misalkan $S(m, F_n, v)$ adalah graf bintang kipas dengan orde $m \geq 3$ dan $n \equiv 0 \ (mod\ 5)$. Didefenisikan *Gap* adalah himpunan semua titik di dalam lintasan terpendek dari u ke v di $S(m, F_n, v)$ selain u dan v. Seperti pada Gambar 4 di bawah ini.



Gambar 4. Gap

Lemma 3.2. Misalkan $S(m, F_n, v)$ adalah graf bintang kipas dengan orde $m \geq 3$ dan $n \equiv 0 \ (mod\ 5)$. Jika $W = W_1 \cup W_2 \cup \cdots \cup W_m$ adalah himpunan dominasi-lokasi dari $S(m, F_n, v)$ jika dan hanya jika $W_i \subset W$ untuk setiap $i = 1,2, \cdots, m$ memenuhi keempat sifat berikut:

a. Setiap gap di W_i memuat maksimal 3 titik;
b. Misalkan A adalah gap yang memuat 3 titik maka $v_i \in W_i$ untuk $i = 1,2, \cdots, m$;
c. Misalkan A adalah gap yang memuat 2 atau 3 titik. Setiap W_i yang bertetangga dengan A harus memuat paling banyak 1 titik;
d. Paling banyak terdapat satu gap di W_i yang memuat 3 titik.

Bukti.

($\Longrightarrow$) Misalkan $W = W_1 \cup W_2 \cup \cdots \cup W_m$ adalah himpunan dominasi-lokasi dari $S(m, F_n, v)$. Akan ditunjukkan bahwa W_i untuk $i = 1,2, \cdots, m$ memenuhi keempat sifat tersebut.

1) Bukti sifat 1.

Andaikan terdapat gap A yang memiliki sedikitnya 4 titik. Misalkan $W_i \subset W$ adalah himpunan dominasi-lokasi dari graf $V(S(m, F_n, v))$. Misalkan A memuat titik $v_{(i,j)}, v_{(i,j+1)}, v_{(i,j+2)}, v_{(i,j+3)}$ yang berada di $V(S(m, F_n, v))$ dengan $E(S(m, F_n, v)) = \{av_i, v_i v_{(i,j)}, v_{(i,j)} v_{(i,j+1)} \mid 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n-1\}$ tetapi $av_{(i,j)}, v_i v_{i+1}, v_{(i,j)} v_{(i,j+2)} \notin E(S(m, F_n, v))$. Jika v_i tidak berada di W_i maka $N(v_{(i,j+1)}) \cap W_i = \emptyset$ dan $N(v_{(i,j+2)}) \cap W_i = \emptyset$ karena $N(v_{(i,j+1)}) = \{v_i, v_{(i,j)}, v_{(i,j+2)}\}$ dan $N(v_{(i,j+2)}) = \{v_i, v_{(i,j+1)}, v_{(i,j+3)}\}$ untuk $j = 1,2, \cdots, n-3$, kontradiksi dengan W_i himpunan dominasi-lokasi dari $V(S(m, F_n, v))$. Jadi haruslah berada v_i di W_i. Karena v_i berada di W_i maka

p-ISSN: 2528-102X, e-ISSN: 2541-4321, URL: http://jurnal.unma.ac.id/index.php/th

$N(v_{(i,j+1)}) \cap W_i \neq \emptyset$ dan $N(v_{(i,j+2)}) \cap W_i \neq \emptyset$. Tetapi $N(v_{(i,j+1)}) \cap W_i = \{v_i\} = N(v_{(i,j+2)}) \cap W_i$, kontradiksi dengan W_i himpunan dominasi-lokasi dari $V(S(m, F_n, v))$. Jadi, setiap gap memiliki maksimal tiga titik.

2) Bukti sifat 2.

Misalkan A adalah gap yang memuat 3 titik $v_{(i,j+1)}, v_{(i,j+2)}, v_{(i,j+3)}$ di $V(S(m, F_n, v))$, $E(S(m, F_n, v)) = \{av_i, v_i v_{(i,j)}, v_{(i,j)} v_{(i,j+1)} | 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n-1\}$ tetapi $av_{(i,j)}, v_i v_{i+1}, v_{(i,j)} v_{(i,j+2)} \notin E(S(m, F_n, v))$. Andaikan titik $v_i \notin W_i$ maka $N(v_{(i,j+2)}) \cap W = \emptyset$ karena $N(v_{(i,j+1)}) = \{v_i, v_{(i,j)}, v_{(i,j+2)}\}$, $N(v_{(i,j+2)}) = \{v_i, v_{(i,j+1)}, v_{(i,j+3)}\}$, dan $N(v_{(i,j+3)}) = \{v_i, v_{(i,j+2)}, v_{(i,j+4)}\}$, kontradiksi dengan W_i himpunan dominasi-lokasi dari $S(m, F_n, v)$. Jadi, haruslah $v_i \in W_i$ untuk $i = 1,2, \cdots, m$.

3) Bukti sifat 3.

Misalkan gap A memuat sedikitnya dua titik. Andaikan setiap gap yang bertetangga dengan A harus memuat paling sedikit dua titik. tanpa mengurangi keumuman, misalkan $v_{(i,j+1)}$ dan $v_{(i,j+2)}$ berada gap A dan $v_{(i,j+4)}$ dan $v_{(i,j+5)}$ berada di gap B untuk $i = 1,2, \cdots, m$ dan $j = 1,2, \cdots, n-5$ dimana A dan B bertetangga. Misalkan titik $v_{(i,j+3)} \in W$ adalah ujung dari kedua gap A dan B. Perhatikan bahwa untuk setiap v_i bertetangga dengan $v_{(i,j)}$ untuk setiap $j = 1,2, \cdots, n$ dan $E(S(m, F_n, v)) = \{av_i, v_i v_{(i,j)}, v_{(i,j)} v_{(i,j+1)} | 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n-1\}$ tetapi $av_{(i,j)}, v_i v_{i+1}, v_{(i,j)} v_{(i,j+2)} \notin E(S(m, F_n, v))$ maka $N(v_{(i,j+1)}) = \{v_i, v_{(i,j)}, v_{(i,j+2)}\}, N(v_{(i,j+2)}) = \{v_i, v_{(i,j+1)}, v_{(i,j+3)}\}$, $N(v_{(i,j+4)}) = \{v_i, v_{(i,j+3)}, v_{(i,j+5)}\}$ dan $N(v_{(i,j+5)}) = \{v_i, v_{(i,j+5)}, v_{(i,j+6)}\}$. Akibatnya $N(v_{(i,j+2)}) \cap W_i = N(v_{(i,j+4)}) \cap W_i$, kontradiksi. Jadi, setiap gap yang bertetangga dengan A harus memuat paling banyak satu titik.

4) Bukti sifat 4.

Andaikan terdapat dua gap yang memuat 3 titik. Misalkan A dan B adalah dua gap dengan $A = \{v_{(i,j+1)}, v_{(i,j+2)}, v_{(i,j+3)}\}$ dan $B = \{v_{(i,7)}, v_{(i,j+8)}, v_{(i,j+9)}\}$ untuk $1 \leq i \leq m$ dan $1 \leq j \leq n-3$. Berdasarkan definisi 1.3 bagian (ii), maka $N(v_{(i,j+1)}) = \{v_i, v_{(i,j)}, v_{(i,j+2)}\}, N(v_{(i,j+2)}) = \{v_i, v_{(i,j+1)}, v_{(i,j+3)}\}, N(v_{(i,j+3)}) = \{v_i, v_{(i,j+2)}, v_{(i,j+4)}\}$ dan $N(v_{(i,j+7)}) = \{v_i, v_{(i,j+6)}, v_{(i,j+8)}\}, N(v_{(i,j+8)}) = \{v_i, v_{(i,j+7)}, v_{(i,j+9)}\}, N(v_{(i,j+9)}) = \{v_i, v_{(i,j+8)}, v_{(i,j+10)}\}$. Akibatnya $N(v_{(i,j+2)}) \cap W_i = \{v_i\} = N(v_{(i,j+8)}) \cap W_i$ dengan $v_i \in W$, kontradiksi dengan W_i himpunan dominasi-lokasi dari $V(S(m, F_n, v))$. Jadi, setiap gap di W_i memuat maksimal 3 titik.

p-ISSN: 2528-102X, e-ISSN: 2541-4321, URL: http://jurnal.unma.ac.id/index.php/th

($\Leftarrow$) Misalkan $W_i \subset W$ memenuhi keempat sifat tersebut. Akan ditunjukkan bahwa W_i himpunan dominasi-lokasi dari $V(S(m, F_n, v))$. Ambil sebarang titik $x \in V(S(m, F_n, v)) \setminus W_i$ yang berada di suatu gap. Maka terdapat tiga kemungkinan posisi x yang berada di dalam gap yang dihasilkan oleh W yakni:

1) x berada di dalam gap yang berukuran satu;
   Misalkan $v_{(i,j)}$ dan $v_{(i,j+2)}$ di W_i merupakan titik ujung dari gap yang memuat titik x. Maka $xv_{(i,j)}, xv_{(i,j+2)}$ saling bertetangga tetapi $v_{(i,j)}v_{(i,j+2)}$ tidak saling bertetangga sehingga
   $N(x) = \{v_i, v_{(i,j)}, v_{(i,j+2)}\}$
   karena v_i bertetangga dengan $v_{(i,j)}$ untuk setiap $j = 1,2,\cdots,n$ dan $v_i \in W_i$. Ambil sebarang u di $V(S(m, F_n, v)) \setminus (W_i \cap \{x\})$. Karena titik u bertetangga dengan $v_{(i,j)}$ atau $v_{(i,j+2)}$, maka $v_{(i,j)} \in N(u) \cap W_i$ atau $v_{(i,j+2)} \in N(u) \cap W_i$. Jadi, untuk setiap u di $V(S(m, F_n, v)) \setminus W_i$ dan $x \neq u$ berlaku $\emptyset \neq N(x) \cap W_i \neq N(u) \cap W_i \neq \emptyset$.
2) x berada di dalam gap yang berukuran dua;
   Misalkan $v_{(i,j)}, v_{(i,j+1)}, v_{(i,j+2)}, v_{(i,j+3)} \in V(S(m, F_n, v))$ dan hanya $v_{(i,j)}, v_{(i,j+3)} \in W_i$ dengan $E(S(m, F_n, v)) = \{av_i, v_iv_{(i,j)},\ v_{(i,j)}v_{(i,j+1)} | 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n-1\}$ tetapi $av_{(i,j)}, v_iv_{i+1}, v_{(i,j)}v_{(i,j+2)} \notin E(S(m, F_n, v))$, maka $x = v_{(i,j+1)}$ atau $x = v_{(i,j+2)}$. Tanpa mengurangi keumuman, misalkan $x = v_{(i,j+1)}$. Kita peroleh
   $N(x) = \{v_i, v_{(i,j)}, v_{(i,j+2)}\}$
   sehingga $N(x) \cap W_i = \{v_i, v_{(i,j)}\} \neq \emptyset$. Ambil sebarang u di $V(S(m, F_n, v)) \setminus (W_i \cap \{x\})$. Perhatikan bahwa terdapat dua kemungkinan posisi u.
   a) berada di dalam gap dengan titik ujung $v_{(i,j)}$. Misalkan $z \in W_i$ adalah titik ujung gap yang memuat u. Perhatikan bahwa $z \in N(u) \cap W_i$ tetapi $z \notin N(x) \cap W_i$.
   b) u berada di dalam gap dengan titik ujung bukan $v_{(i,j)}$. Misalkan $y, z \in W_i$ adalah titik ujung yang memuat u. Perhatikan bahwa $v_{(i,j)} \notin N(u) \cap W_i$ tetapi $v_{(i,j)} \in N(x) \cap W_i$.

   Jadi, untuk setiap setiap u di $V(S(m, F_n, v)) \setminus W_i$ dan $x \neq u$ berlaku $\emptyset \neq N(x) \cap W_i \neq N(u) \cap W_i \neq \emptyset$.
3) x berada di dalam gap yang berukuran tiga;
   Misalkan $v_{(i,j)}, v_{(i,j+1)}, v_{(i,j+2)}, v_{(i,j+3)}, v_{(i,j+4)} \in V(S(m, F_n, v))$ dan $v_{(i,j)}, v_{(i,j+4)} \in W_i$. Dari sini kita peroleh $x = v_{(i,j+1)}, x = v_{(i,j+2)}$, atau $x = v_{(i,j+3)}$
   Karena x berada di dalam gap yang berukuran tiga maka $v_i \in W_i$ untuk $i = 1,2,\cdots,m$.
   a) $x = v_{(i,j+2)}$
      Perhatikan bahwa $N(x) \cap W_i = \{v_i\}$. Karena paling banyak satu buah gap yang berukuran tiga, maka $x = v_{(i,j+2)}$ adalah satu-satunya titik yang memenuhi $N(x) \cap W_i = \{v_i\}$.
   b) $x = v_{(i,j+2)}$ atau $x = v_{(i,j+3)}$

p-ISSN: 2528-102X, e-ISSN: 2541-4321, URL: http://jurnal.unma.ac.id/index.php/th

Tanpa mengurangi keumuman, misalkan $x = v_{(i,j+2)}$. Perhatikan bahwa $d(x, v_{(i,j+1)}) = 1$, dan $d(x,z) = 2$ untuk $z \in W_i \setminus \{v_{(i,j+1)}\}$ berdasarkan sifat 1,2 dan 3, titik $x = v_{(i,j+2)}$ adalah satu-satunya titik yang memiliki syarat ini.

Jadi, untuk setiap u di $V(S(m,F_n,v)) \setminus W_i$ dan $x \neq u$ berlaku $\emptyset \neq N(x) \cap W_i \neq N(u) \cap W_i \neq \emptyset$ maka W_i himpunan dominasi-lokasi dari $S(m,F_n,v)$.

Lemma 3.3. Misalkan $S(m,F_n,v)$ adalah graf bintang kipas dengan orde $m \geq 3$ dan $n \equiv 0(mod\ 5)$. Jika $W = W_1 \cup W_2 \cup \cdots \cup W_m$ adalah himpunan dominasi-lokasi dari $S(m,F_n,v)$, maka

$$|W_1 \cup W_2 \cup \cdots \cup W_m| = \begin{cases} 3m & \text{jika } m \geq 3 \text{ dan } n = 5 \\ 5m & \text{jika } m \geq 3 \text{ dan } n = 10 \\ 7m & \text{jika } m \geq 3 \text{ dan } n = 15 \\ 9m & \text{jika } m \geq 3 \text{ dan } n = 20 \\ \vdots & \\ (2k+1)m & \text{jika } m \geq 3, n = 5k, \text{dan } k \geq 1 \end{cases}$$

Bukti. Misalkan $S(m,F_n,v)$ adalah graf bintang kipas dengan orde $m \geq 3$ dan $n \equiv 0(mod\ 5)$. Misalkan $W_i \subset W$ untuk $i = 1,2,\cdots,m$ adalah himpunan dominasi-lokasi dari $S(m,F_n,v)$.

1) $m \geq 3$ dan $n = 5$;
   Berdasarkan lemma 3.2, pilih $W_i = \{v_i, v_{(i,1)}, v_{(i,5)}\}$ atau $W_i = \{\{v_i, v_{(i,1)}\} \cup \{v_{(i,5r)} | r = 1\}\}$ maka $|W_i| = 2 + 1 = 3$ untuk $i = 1,2,\cdots,m$. Akibatnya $|W_1 \cup W_2 \cup \cdots \cup W_m| = 3 + 3 + \cdots + 3 = 3m$.
2) $m \geq 3$ dan $n = 10$;
   Berdasarkan lemma 3.2, pilih $W_i = \{v_i, v_{(i,1)}, v_{(i,5)}, v_{(i,7)}, v_{(i,10)}\}$ atau $W_i = \{\{v_i, v_{(i,1)}\} \cup \{v_{(i,5r)} | r = 1,2\} \cup \{v_{(i,5t+2)} | t = 1\}\}$ maka $|W_i| = 2 + 2 + 1 = 5$ untuk $i = 1,2,\cdots,m$. Maka $|W_1 \cup W_2 \cup \cdots \cup W_m| = 5 + 5 + \cdots + 5 = 5m$.
3) $m \geq 3$ dan $n = 15$;
   Berdasarkan lemma 3.2, pilih $W_i = \{\{v_i, v_{(i,1)}\} \cup \{v_{(i,5r)} | r = 1,2,3\} \cup \{v_{(i,5t+2)} | t = 1,2\}\}$ maka $|W_i| = 2 + 3 + 2 = 7$ untuk $i = 1,2,\cdots,m$. Maka $|W_1 \cup W_2 \cup \cdots \cup W_m| = 7 + 7 + \cdots + 7 = 7m$.
4) $m \geq 3$ dan $n = 20$
   Berdasarkan lemma 3.2, pilih $W_i = \{\{v_i, v_{(i,1)}\} \cup \{v_{(i,5r)} | r = 1,2,3,4\} \cup \{v_{(i,5t+2)} | t = 1,2,3\}\}$ maka $|W_i| = 2 + 4 + 3$ untuk $i = 1,2,\cdots,m$. Maka $|W_1 \cup W_2 \cup \cdots \cup W_m| = 9 + 9 + \cdots + 9 = 9m$.
   Seterusnya
5) $m \geq 3, n = 5k$, dan $k \geq 1$.
   Berdasarkan lemma 3.2, pilih $W_i = \{\{v_i, v_{(i,1)}\} \cup \{v_{(i,5r)} | r = 1,2,3,4,\cdots,k\} \cup \{v_{(i,5t+2)} | t = 1,2,3,\cdots,k-1\}\}$ maka $|W_i| = 2 + (k) + (k-1) = 2k + 1$ untuk $i = 1,2,\cdots,m$. Maka $|W_1 \cup W_2 \cup \cdots \cup W_m| = (2k+1) + (2k+1) + \cdots + (2k+1) = (2k+1)\,m$

Teorema 3.1. Misalkan $S(m,F_n,v)$ adalah graf bintang kipas dengan orde $m \geq 3$ dan $n \equiv 0\ (mod\ 5)$. Maka $\lambda(S(m,F_n,v)) = \frac{m}{5}(2n+5)$.

Bukti. Misalkan $S(m,F_n,v)$ adalah graf bintang kipas dengan orde $m \geq 3$ dan $n \equiv 0\ (mod\ 5)$. Misalkan $R_1, R_2, \cdots, R_m$ adalah m buah kipas saling lepas dan titik $\{a\}$ bertetangga dengan R_i untuk $i \in \{1,2,\cdots,m\}$ di $S(m,F_n,v)$ sehingga $V(R_1) \cup V(R_2) \cup \cdots \cup V(R_m) \cup \{a\} = V(S(m,F_n,v))$. Maka $|V(S(m,F_n,v))| = mn + m + 1$ dan $|E(S(m,F_n,v))| = 2mn$.

Kasus 1. $\lambda(S(m,F_n,v)) \leq \frac{m}{5}(2n+5)$

p-ISSN: 2528-102X, e-ISSN: 2541-4321, URL: http://jurnal.unma.ac.id/index.php/th

Misalkan $W_i \subset W$ untuk $i = 1,2,\cdots,m$ adalah himpunan dominasi-lokasi dari $S(m, F_n, v)$. Berdasarkan lemma 3.3, $|W_1 \cup W_2 \cup \cdots \cup W_m| = m\,(2k+1) \leq m\,(2k+3)$ jika $m \geq 3, n = 5k$, dan $k \geq 1$. Ini menunjukkan bahwa banyaknya gap di $S(m, F_n, v)$ adalah selalu ganjil. Karena W_i memenuhi keempat sifat di Lemma 3.2, maka banyaknya gap berisi maksimum 1 titik adalah k buah gap dan banyaknya gap berisi lebih dari 1 titik adalah $k+1$ buah gap. Dengan demikian banyaknya titik dalam gap maksimal adalah $k \cdot 1 = k$ dan $3 + 2k$. Akibatnya maksimal banyaknya titik dalam gap di $R_i \subset S(m, F_n, v)$ untuk $i \in \{1,2,\cdots,m\}$ adalah $3 + 2k + k = 3k + 3$. Maka maksimal banyaknya titik dalam gap di $S(m, F_n, v)$ adalah $m(3k+3) + 1 = 3mk + 3m + 1$, kita peroleh $mn + m + 1 - |W_1 \cup W_2 \cup \cdots \cup W_m| = 3mk + 3m + 1$ sehingga $k = \frac{n-5}{5}$. Jadi, $\lambda\big(S(m, F_n, v)\big) = |W_1 \cup W_2 \cup \cdots \cup W_m| \leq m(2k+3) = 2m \cdot \frac{n-5}{5} + 3m = \frac{m}{5}(2n+5)$.

Kasus 2. $\lambda\big(S(m, F_n, v)\big) \geq \frac{m}{5}(2n+5)$

Misalkan $W_i \subset R_i$ untuk $i = 1,2,\cdots,m$. Tanpa mengurangi keumuman, pilih $W_i = \Big\{\big\{\{v_i, v_{(i,1)}\} \cup \{v_{(i,5r)} | r = 1,2,3,4,\cdots,k\} \cup \{v_{(i,5t+2)} | t = 1,2,3,\cdots,k-1\}\big\}\Big\}$ maka W_i memenuhi keempat sifat pada Lemma 3.2. Akibatnya $|W_i| = 2 + k + (k-1) = 2k + 1$ untuk $m \geq 3$, $n = 5k$, dan $k \geq 1$. Perhatikan $n = 5k$ maka $k = \frac{n}{5}$ sehingga diperoleh $|W_i| = 2 \cdot \frac{n}{5} + 1 = \frac{2n+5}{5}$. Jadi, $\lambda\big(S(m, F_n, v)\big) = |W_1 \cup W_2 \cup \cdots \cup W_m| \geq \frac{2n+5}{5} + \frac{2n+5}{5} + \cdots + \frac{2n+5}{5} = m\left(\frac{2n+5}{5}\right) = \frac{m}{5}(2n+5)$.

Berdasarkan kasus 1 dan kasus 2, maka $\lambda\big(S(m, F_n, v)\big) = \frac{m}{5}(2n+5)$.

4. KESIMPULAN

Berdasarkan hasil dan pembahasan, maka diperoleh suatu kesimpulan bahwa bilangan dominasi-lokasi untuk graf bintang kipas $S(m, F_n, v)$ dengan orde $m \geq 3$ dan $n \equiv 0\ (mod\ 5)$ adalah $\lambda\big(S(m, F_n, v)\big) = \frac{m}{5}(2n+5)$.

5. SARAN

Pada penelitian ini, kami mempelajari bilangan lokasi-dominasi untuk beberapa kelas graf bintang-G. Salah satu yang telah kami pelajari dan menentukan graf bintang-G yaitu graf bintang kipas $S(m, F_n, v)$ dengan orde $m \geq 3$ dan $n \equiv 0\ (mod\ 5)$. Oleh karena itu penelitian ini juga kami memberikan saran untuk penelitian selanjutnya di bidang ini.

1. Misalkan G adalah graf lingkaran bintang [9]. Tentukan bilangan dominasi-lokasi dari G
2. Misalkan G adalah graf bintang-G dengan G bukan graf kipas. Tentukan bilangan dominasi-lokasi dari G

6. DAFTAR PUSTAKA

[1] P,J, Salter. (1975). Leaves of Trees, *Congres.* Number 14. Hal 549-559.

[2] Harary, F., & Melter, R. A. (1976). On the metric dimension of a graph. *Ars Combin*, *2*(191-195), 1.

[3] Khuller, S., Raghavachari, B., & Rosenfeld, A. (1996). Landmarks in graphs. *Discrete Applied Mathematics*, *70*(3), 217-229.

[4] Chartrand, G., & Zhang, P. (2003). The theory and applications of resolvability in graphs. *Congressus Numerantium*, 47-68.

[5] G. Chartrand, L. Eroh, M. Johnson, dan O. R. Ollerman, resolvabililty

p-ISSN: 2528-102X, e-ISSN: 2541-4321, URL: http://jurnal.unma.ac.id/index.php/th

in graph and Metric dimension of graph., *Discrete Appl.* 105, (2000), 99-113.

[6] Jayagopal, R., Rajan, R. S., & Rajasingh, I. (2015). Tight Lower Bound For Locating-total Domination Number. *International Journal of Pure and Applied Mathematics*, *101*(5), 661-668

[7] Cáceres, J., Hernando, C., Mora, M., Pelayo, I. M., & Puertas, M. L. (2013). Locating–dominating codes: Bounds and extremal cardinalities. *Applied Mathematics and Computation*, *220*, 38-45.

[8] Hernando Martín, M. D. C., Mora Giné, M., & Pelayo Melero, I. M. (2013). Locating domination in graphs and their complements.

[9] Bustan, A. W., & Salman, A. N. M. (2018). The Rainbow Vertex-Connection Number of Star Fan Graphs. *CAUCHY*, *5*(3), 112-116.

[10] Bustan, A. W. (2016). BILANGAN TERHUBUNG TITIK PELANGI UNTUK GRAF LINGKARAN BINTANG ($\boldsymbol{SmCn}$). *Barekeng: Jurnal Ilmu Matematika dan Terapan*, *10*(2), 77-81.

p-ISSN: 2528-102X, e-ISSN: 2541-4321, URL: http://jurnal.unma.ac.id/index.php/th